Zur Bewegung ausgedehnter Objekte in der Einsteinschen Gravitationstheorie

W. BEIGLBÖCK

Institut für Angewandte Mathematik der Universität Heidelberg

(Z. Naturforschg. **22 a**, 1342—1347 [1967]; eingegangen am 31. Mai 1967)

Herrn Professor Dr. PASCUAL JORDAN *zum 65. Geburtstag gewidmet*

Für einen ausgedehnten, mit Hilfe der relativistischen Hydrodynamik beschriebenen materiellen Körper werden hinreichende Bedingungen dafür angegeben, daß seine Trägheitsbewegung im vollen Schwerefeld einer (im Sinne EINSTEINS) gravisch nicht-trivialen Welt streng geodätisch ist. Vorliegende Untersuchung beschränkt sich dabei auf recht spezielle Gravitationsfelder, die durch obengenannte Bedingungen indirekt festgelegt sind.

§ 1.

Im Rahmen der klassischen Physik macht EINSTEINS Gravitationstheorie insofern eine bemerkenswerte Ausnahme, als sie den Zusammenhang in dem zur Beschreibung physikalischer Vorgänge benutzten Tangentenbündel nicht a priori festlegt, sondern ihn experimentell bestimmen will [1]. Als Brücke zwischen Geometrie und Messung dient neben den Feldgleichungen $R_{ab} - \frac{1}{2} R\, g_{ab} = T_{ab}$ [2] das Postulat, daß die Bewegung von Probekörpern „unter alleiniger Einwirkung der Trägheit und Gravitation" durch die Geodätischen des gesuchten (metrischen) Zusammenhangs beschrieben sei [3]. Hieraus erklärt sich das außergewöhnliche und anhaltende Interesse der mathematischen Physik am Studium der Bewegung materieller Körper gerade in dieser Theorie; stellt es sich doch bald heraus, daß die Präzisierung des obigen Postulats im Rahmen der fertigen Theorie außergewöhnliche Schwierigkeiten macht. Zunächst wurden sie umgangen, indem physikalisch gerechtfertigte Näherungsverfahren bei der Behandlung des Bewegungsproblems benutzt wurden, in deren Rahmen Probekörper und „Geodäsie der Bewegung" definierbar waren — im Hinblick auf Fragen der Kosmologie am interestantesten ist dabei das Studium des Vielteilchenproblems am groben Modell zeitartiger Kongruenzen im Vakuum (z. B. [4,5]). Da aber schon die Näherungsmethoden zeigen, daß über die Feldgleichungen die innere Beschaffenheit der Körper Einfluß auf die Bewegung nimmt, wird man schnell gezwungen, den Punktteilchenbegriff zu modifizieren, ihn im Grunde sogar aufzugeben. Esteres ist in dem Verfahren von PAPAPETROU [6] durch die Einführung von Multipolmomenten — Tensorfeldern entlang der Trajektorie des immer noch punktförmigen Teilchens — geschehen. Dabei aber stellt sich heraus, daß die Teilchenbahn nur dann festgelegt ist, wenn die Momente nicht völlig unabhängig voneinander gewählt werden. Es war DIXON [7], der klar herausstellte, daß die Wahl der benötigten Bedingungsgleichung, $P_a S^{ab} = 0$, eng mit dem Begriff der Schwerelinie einer räumlich ausgedehnten Materieverteilung zusammenhängt, es somit unvermeidbar wird, das Punktteilchen durch einen ausgedehnten „Materieschlauch" zu ersetzen [8], der seinerseits eine zeitartige Kurve eindeutig festlegen soll. Unter geeigneten Voraussetzungen wird es in der Tat möglich, einer räumlich ausgedehnten Materieverteilung unter Einbeziehung der Feldgleichungen eine solche Schwerelinie zuzuordnen [10, 11]. Ihren raumzeitlichen Verlauf nennen wir dann die Bewegung der Materieverteilung. Ist damit schließlich dem EINSTEINschen Postulat in seinem zweiten Teil

[1] Eine konsequente Weiterführung dieses Gedankens unter Einbeziehung der MAXWELL-Theorie versuchte P. JORDAN, Schwerkraft und Weltall, Vieweg, Braunschweig 1955.

[2] Der Materieanteil T^{ab} wird hier als gemessene Größe aufgefaßt.

[3] A. EINSTEIN, Ann. Phys. **49**, 769 [1916].

[4] H. MÜLLER ZUM HAGEN, Commun. Math. Phys. **3**, 292 [1966].

[5] M. TRÜMPER, A New Characterisation of FRIEDMANNS Cosmological Models, Preprint Hamburg 1961; J. Math. Phys. **6**, 4, 584 [1965].

[6] A. PAPAPETROU, Proc. Roy. Soc. London A **209**, 284 [1951].

[7] G. DIXON, Nuovo Cimento (X) **34**, 317 [1964]; Thesis Churchill University, Cambridge, England 1965.

[8] Untersuchungen von TAUB [9] zeigen, daß die Einführung distributionswertiger T^{ab} — deren mathematische Stellung innerhalb der Gravitationstheorie vollkommen ungeklärt ist — die von DIXON aufgedeckten Schwierigkeiten nicht löst.

[9] A. H. TAUB, J. Math. Phys. **5**, 1, 112 [1964]; Atti del Covegno Rel. Gen., Florenz, Sept. 1964.

[10] W. BEIGLBÖCK, Commun. Math. Phys. **5**, 106 [1967].

[11] Tatsächlich gibt es dafür mehrere inäquivalente Möglichkeiten, die in der flachen Welt zusammenfallen.

eine genaue Bedeutung unterlegt, so bekommt die für die physikalische Meßbarkeit der Theorie wichtige Frage einen Sinn: Gibt es Materieverteilungen T_{ab}, deren Schwerelinie eine Geodätische in dem durch die Feldgleichungen festgelegten metrischen Zusammenhang ist? Die vorliegende Arbeit soll einen Beitrag zu ihrer Beantwortung liefern.

§ 2.

In diesem Abschnitt stellen wir das Wichtigste über die Schwerelinie S zusammen, wobei wir die in [10] angegebenen Voraussetzungen auch hier als gültig betrachten, ohne sie nochmals zu wiederholen; dies rechtfertigt sich dadurch, daß alle bisher bekannten astronomischen Objekte und die von ihnen erzeugten Gravitationsfelder sie erfüllen.

Sei e^a ein zeitartiger Einheitsvektor in $x^a(s) \in S$, dann bezeichne $\Gamma_e(u, v, w)$ die durch u, v, w parametrisierte, von den in $x^a(s)$ orthogonal zu e^a auslaufenden Geodätischen erzeugte Schnittfläche durch die Weltröhre T ($\equiv$ Träger von T_{ab}); ihr Volumelement ist

$$\mathrm{d}x_a{}^* = \eta_{abcd} \frac{\partial x^b}{\partial u} \frac{\partial x^c}{\partial v} \frac{\partial x^d}{\partial w} \,\mathrm{d}u\, \mathrm{d}v\, \mathrm{d}w.$$

Versteht man unter $\int\limits_{\Gamma_e} t^{ab \ldots r} \,\mathrm{d}x_r{}^*$ das Integral in $x^a(s)$ über alle von $\xi \in \Gamma_e$ nach $x^a(s)$ entlang der Geodätischen $g(x, \xi)$ parallelverschobenen Tensoren $t^{ab\ldots r}(\xi)\, \mathrm{d}x_r{}^*$, dann definiert

$$e^a \to e_a \int\limits_{\Gamma_e} T^{ab} \,\mathrm{d}x_b{}^*$$

eine differenzierbare Abbildung des Einheitsmassenhyperboloids in $x^a(s)$ nach R^+, die genau in $e^a = u^a(s)$ ihr Minimum annimmt. $s \to u^a(s)$ ist differenzierbar und heißt das Minimalvektorfeld auf S; mit $\Gamma_{u(s)} \equiv \Gamma_s$ heißt

$$M(s) \equiv u_a(s) \int\limits_{\Gamma_s} T^{ab} \,\mathrm{d}x_b{}^* \tag{1}$$

die Gesamtruhmasse des Systems T^{ab} und

$$P^a(s) \equiv \int\limits_{\Gamma_s} T^{ab} \,\mathrm{d}x_b{}^* \tag{2}$$

sein Gesamtimpuls.

Die Definition von u^a als Minimum von

$$e^a \to e^a g_{ab} \Phi_x{}^b(e)$$

mit $\quad \Phi_x{}^a(e) = \int\limits_{\Gamma_e} T^{ab} \,\mathrm{d}x_b{}^*$

unter der Nebenbedingung $e^a e_a = 1$ liefert:

$$P^a - \lambda u^a + \sum_{d,i} u_d \cdot (\partial \Phi_x{}^d / \partial e^i)(u)\, g^{ai} = 0 . \tag{3}$$

Da $\Phi_x{}^a$ nur von der Richtung von e^a, nicht aber von dessen Betrag abhängt, gilt:

$$u^a \,\partial \Phi_x{}^b / \partial e^a = 0 ,$$

woraus dann aber folgt:

$$\lambda = u_a P^a = M , \tag{4}$$

und im dritten Sumanden von (3) können wir g^{ai} durch $h^{ai} \equiv -g^{ai} + u^a u^i$ ersetzen.

Für das Folgende nehmen wir an, daß es eine wenigstens dreimal differenzierbare, zeitartige Kurvenkongruenz in T gibt, die eine $1-1$-Abbildung der Γ_s-Schnitte untereinander vermittelt; (Bezeichnung: v-Linien).

Falls die Geodätische $g(x, \xi)$ senkrecht zu $u^a(s)$ lokal beschrieben ist durch

$$x^a(s) + \tau \,\tilde{\xi}^a + o(\tau^2) \quad \text{mit} \quad \tilde{\xi}^a \tilde{\xi}_a = -1 ,$$

dann setzen wir $\quad \xi^a = |\, g(x, \xi) \,|\, \tilde{\xi}^a$.

Wir beachten, daß die Integrale mittels Parallelverschiebung erklärt sind und verstehen unter (1), ... den Parallelverschiebungsoperator entlang der Strecke 1, ... in Abb. 1. Der bekannte Zusam-

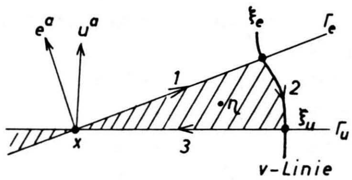

Abb. 1.

menhang zwischen Parallelverschiebung und RIEMANN-Tensor liefert:

$$\frac{\partial \Phi_x{}^a(u)}{\partial e^a} = \lim_{e \to u} \frac{1}{(e^a - u^a)\, \alpha_a}$$
$$\{ \int\limits_{\Gamma_u} (3) \circ [\,(2) \circ T^{ab} \,\mathrm{d}x_b{}^*(\xi_e) - T^{ab} \,\mathrm{d}x_b{}^*(\xi_u)\,]$$
$$+ \int\limits_{\Gamma_e} (1)^{-1} \circ T^{db} \,\mathrm{d}x_b{}^*(\xi_e) \int\limits_{\Delta} R^a{}_{dbc} \,\mathrm{d}x^{*bc} \} \tag{5}$$

mit $\xi_e \in \Gamma_e$, $\xi_u \in \Gamma_u$. Das Integral über den RIEMANN-Tensor ist dabei über die Parallelverschiebung von η nach x entlang der verbindenden Geodätischen erklärt. Der Integrationsbereich ist ein in T liegendes, von $g(x, \xi_u)$, $g(x, \xi_e)$ und dem v-Linienstück $v(\xi_u, \xi_e)$ begrenztes Flächenstück, dessen Wahl ansonsten beliebig ist. α^a ist der zum Koordinatenindex α gehörende Einheitsvektor in dem orthonormierten Tetrad $(u^a, \alpha^a)_{\alpha = 1,2,3}$, $u^a = \delta_0{}^a$. Das Ausführen des Grenzübergangs führt dann zu:

$$-\frac{\partial \Phi_x{}^a(u)}{\partial e^b} = \int\limits_{\Gamma_u} \xi^b (T^{ac}\, n_c)_{\|d}\, v^d\, \mathrm{d}V$$

$$+ 2 \int\limits_{\Gamma_u} T^{rs} \, [\int\limits_x^\xi \xi^b(\tau)\, R^a{}_{rc*d}\, v^d\, t^c\, \mathrm{d}\tau\,]\, \mathrm{d}x_s{}^*, \qquad (6)$$

wobei die Geodätische $g(x, \xi)$ durch $x^a(\tau)$ beschrieben und $t^a \equiv \partial x^a/\partial\tau$ ihr Tangentenvektor ist, v^a ist der Tangentenvektor an die v-Linie, n^a der mit $\sqrt{-g(\xi)}$ multiplizierte Normalenvektor zu Γ_u in ξ, $R^a{}_{bc*d} = \frac{1}{2}\, \eta_{cd}{}^{ef}\, R^a{}_{bef}$.

Mit dem durch (3), (6) gelieferten Minimalvektorfeld läßt sich die Schwerelinie kennzeichnen durch:

$$x^a(s) = \frac{1}{M(s)}\, u_r(s) \int\limits_{\Gamma_u} \xi^a\, T^{rs}\, \mathrm{d}x_s{}^*. \qquad (7)$$

Diese Gleichung stimmt formal mit der klassischen Schwerpunktsdefinition überein, macht hier aber nur unter Einbeziehung der Metrik g_{ab} bei Gültigkeit des vollen Feldgleichungssystems Sinn.

In [10] ist gezeigt: Zu dem Gleichungspaar (3) – mit (2), (4), (6) – und (7) – mit (1) – gibt es Lösungspaare $[x^a, u^a(x)]$ [12]; die Menge der ersten Komponenten dieser Paare – einfach als Punktmenge der Mannigfaltigkeit aufgefaßt – bildet eine stetige, zeitartige Kurve in der geodätisch konvexen Hülle von T; Bezeichnung: Schwerelinie von T^{ab}. In dieser Arbeit nehmen wir an, daß diese Kurve sogar genügend oft differenzierbar ist; dann kann man sie durch die Eigenzeit s parametrisieren, d. h. $s^a \equiv \mathrm{d}x^a(s)/\mathrm{d}s$, $\quad s^a\, s_a = 1$.

Um den Tangentenvektor zu berechnen, ersetzen wir zunächst die Parametrisierung der v-Linien durch den Eigenzeitparameter auf der Schwerelinie, indem wir als Kurvengleichung nunmehr $s \rightarrow \Gamma_s \cap$ (v-Linie) ansetzen. Da die Schwerelinie differenzierbare Kurve, $u^a(s)$ ein differenzierbares Vektorfeld ist, ist die v-Kongruenz weiterhin differenzierbar beschrieben. War ursprünglich die Schar beschrieben durch (ξ, s'), dann ist $s' = s'(\xi, s)$ und mit $A(\xi, s) = \mathrm{d}s'/\mathrm{d}s$ auch

$$v'^a(\xi, s) = A(\xi, s)\, v^a(\xi, s'(\xi, s))\,. \qquad (8)$$

Mit Hilfe der v'-Kongruenz berechnet sich der Tangentenvektor zu

$$M(s)\, s^a(s) = \frac{\mathrm{d}u_r}{\mathrm{d}s} \int\limits_{\Gamma_u} \xi^a\, T^{rs}\, \mathrm{d}x_s{}^* + u_r(s) \{ \int\limits_{\Gamma_u} (\mathcal{L}_{v'}\, \xi^a)\, T^{rs}\, \mathrm{d}x_s{}^* + \int\limits_{\Gamma_u} \xi^a\, \mathcal{L}_{v'} (T^{rs}\, n_s)\, \mathrm{d}V \}. \qquad (9)$$

Hierin beschreibt $\mathcal{L}_{v'}$ die Lie-Ableitung in v'-Richtung. Zu beachten ist, daß ξ^a entlang der Schwerelinie definierte Vektoren sind, so daß ihre Lie-Ableitung nur dort berechnet zu werden braucht. Der Ausdruck (9) läßt sich ohne allzu große Mühe in einem mitgeführten Normalkordinatensystem mit $u^a(s) \equiv \delta_0{}^a$ und $x^a(s) \equiv 0$ für die Schwerelinie errechnen.

Zu (9) ist zu bemerken, daß die rechte Seite durch die Kenntnis des $u^a(s)$-Feldes auf der Schwerelinie eindeutig festgelegt ist bei gegebenem g_{ab} und T_{ab}; damit ist wegen des weiter oben zitierten Resultats bei gegebener Metrik die Bewegung des ausgedehnten Objekts allein durch seinen Energieimpulstensor bestimmt [13]. Es ist daher für unsere eingangs gestellte Frage zweckmäßig, letzteren genauer zu studieren.

§ 3.

Da Einsteins Theorie davon ausgeht, daß in einer hinreichend kleinen Umgebung die Spezielle Relativitätstheorie gelten soll, ist der in der relativistischen Hydrodynamik (z. B. [15]) benutzte Energie-Impulstensor

$$T^{ab} = \varrho\, v^a\, v^b + 2\, q^{(a} v^{b)} + \pi^{ab} \qquad (10)$$

als eine der Messung zugängliche Größe interpretierbar. Dazu muß man unter dem Tangentenfeld v^a an die v-Kongruenz die barzyentrische 4-Geschwindigkeit der Substratelemente verstehen [16], in deren Ruhsystem dann die lokale Energiedichte ϱ, der Konvek-

[12] Die Lösungen sind Punkte p des Tangentenbündels über V^4 mit Standardfaser M^4 und Projektion π, die wir hier lokal durch obiges Paar beschreiben; die Schwerelinie ist dann $\{\pi(p)\}$.

[13] Im Falle der von Dixon [7, 14] vorgeschlagenen Schwerelinie bedeutet das, daß der Gesamtimpuls P^a und der Gesamtdrehimpuls S^{ab} die Bewegung bereits festlegen.

[14] G. Dixon, On the Description of Extended Bodies by Multipole Moments, Preprint, Churchill University, Cambridge, England, Februar 1967.

[15] J. Ehlers, Akad. Wiss. Lit. Mainz, Abhandl. Math.-Nat. Kl. **11**, 791 [1961].

[16] Unter den üblichen Annahmen der Hydrodynamik für die „infinitesimalen Gebiete“ ist das mit Hilfe des in § 2 Gesagten innerhalb der Gravitationstheorie eine konsistente Bildung.

tionsstrom q^a ($q^a v_a = 0$) und der Drucktensor π^{ab} ($\pi^{ab} v_b = 0$, $\pi^{[ab]} = 0$) Meßgrößen im Sinne der Speziellen Relativitätstheorie sind. Wir werden uns der Einfachheit halber auf einen rein hydrostatischen Druckanteil $\pi^{ab} = p\,h^{ab}$, $h^{ab} = -g^{ab} + v^a v^b$ beschränken.

Bekanntlich kann man bei gegebener Metrik g_{ab} die v-Kongruenz auch durch die „kinematischen Größen" ω_{ab}, σ_{ab}, Θ, $\dot{v}_a$ (siehe dazu z. B. [15]) beschreiben; dies auf Grund der Zerlegung:

$$v_{a\|b} = \omega_{ab} + \sigma_{ab} - \Theta\, h_{ab} + \dot{v}_a v_b\,. \tag{11}$$

Ebenso kann man mit Hilfe der aus (11) gefolgerten Beziehung

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2} R_{adbc} v^d = v_{a\|[bc]} = \omega_{a[b\|c]} + \sigma_{a[b\|c]} - \tfrac{1}{3} h_{a[b}\Theta_{|c]} + \tfrac{1}{3}\Theta(\omega_{a[c} + \sigma_{a[c} - \tfrac{1}{3}\Theta\, h_{a[c} + \dot{v}_a v_{[c)}\, v_{b]} \\ - \tfrac{1}{3}\Theta\, v_a(\omega_{bc} - \dot{v}_{[b} v_{c]}) + \dot{v}_{a\|[b} v_{c]} + \dot{v}_a(\omega_{bc} + \dot{v}_{[b} v_{c]}))\end{aligned} \tag{12}$$

und der aus (10) und den Feldgleichungen stammenden Relation $q^a = h^{ab} R_{bc} v^c$ den Konvektionsanteil durch die kinematischen Größen allein ausdrücken:

$$q^a = \sigma^{ac}{}_{\|c} - \omega^{ac}{}_{\|c} - h^{ac}\,\Theta_{|c} - \sigma^{ac}\dot{v}_c + \omega^{ac}\dot{v}_c\,. \tag{13}$$

(ϱ und π^{ab} enthalten noch Differentialausdrücke zweiter Ordnung in g_{ab}, lassen sich aber ähnlich umschreiben).

Aus (10) folgt die auf Grund der Feldgleichungen gültige Bilanzgleichung ($4\,\mu \equiv \varrho + p$):

$$0 = T^{ab}{}_{\|b} = (\varrho\, v^a)^{\cdot} + p_{|b} h^{ab} + 4\,\mu\,\Theta\, v^a + \dot{q}^a + q^b{}_{\|b} v^a + p\,\dot{v}^a\,. \tag{14}$$

Überschieben wir sie mit v_a und nutzen (13) aus, dann erhalten wir die Bilanz für die lokale Energiedichte entlang der Kongruenz:

$$\dot{\varrho} = \dot{v}_a(\sigma^{ac} - \omega^{ac})_{\|c} - 4\,\mu\,\Theta - \sigma^{ac}\dot{v}_a\dot{v}_c - \sigma^{ac}{}_{\|ac} + \omega^{ac}{}_{\|ac} + \Theta\,\dot{\Theta} + [\dot{v}_c(\sigma^{ac} - \omega^{ac})]_{\|a}\,. \tag{15}$$

Wir werden noch als nützliche Formel brauchen: (t^a beliebig!)

$$R^a{}_{rb*c}\, t^b v^c = \eta^a{}_r{}^{ef}\{6\,\mu\, t_{[e} v_{f]} - (q_{[e} h_{f]d} + v_{d\|[ef]})\, t^d\}\,, \tag{16}$$

in der wir uns den letzten Summanden über (12) noch durch kinematische Größen ausgedrückt denken können. Um die Formel zu erhalten, errechne man den dualschiefsymmetrischen Anteil des RIEMANN-Tensors [17]

$$E_{abcd} = -g_{abs[c} S^s{}_{d]} \quad (g_{abcd} = g_{a[c} g_{d]b}\,,\ S_{ab} = T_{ab} - \tfrac{1}{4} T\, g_{ab})$$

mit Hilfe von (10) und setze das in $R_{a*bcd} v^b = (R_{abc*d} + 2\,E_{abc*d})\, v^b$ ein.

Wir werden die hier aufgezeigten lokalen Eigenschaften der Materie dazu benutzen, um damit wenigstens in einigen speziellen Fällen über die in § 2 gegebenen Beziehungen über die Bewegung der ausgedehnten Materie als Ganzes etwas zu sagen.

§ 4.

Die Überlegungen der beiden vorhergehenden Paragraphen liefern auf der Schwerelinie S die vier verschiedenen Vektorfelder u^a, P^a, s^a und v^a, die unter den allgemeinsten Bedingungen weder zusammenfallen, noch untereinander durch eine einfache Beziehung verbunden sind. Wollen wir daher aus der lokalen Kenntnis der Materie auf ihre Schwerpunktsbewegung schließen, sind wir zu einschränkenden Annahmen gezwungen – dies aber auch schon aus rechnerischen Gründen. Da wir aber zunächst nur auf die Existenz geodätisch bewegter Objekte abzielen, ist eine Einschränkung gerechtfertigt. Wir fordern zunächst:

(I) Auf der Schwerelinie soll $v^a(x(s)) = u^a(s)$ sein.

(II) Die Schnitte Γ_s seien Orthogonalflächen zur Kongruenz zu v^a.

Aus der letzten Bedingung folgt $\omega = 0$ auf Grund der Existenz von Orthogonalflächen (z. B. [15]), andererseits muß mit dem Vektorfeld t^a aus (6) gelten: $\mathrm{d}/\mathrm{d}\tau \cdot (v^a t_a) = 0$, was impliziert: $\Theta = 0$, $\sigma_{ab} t^a t^b = 0$.

[17] P. JORDAN, J. EHLERS u. W. KUNDT, Akad. Wiss. Lit. Mainz, Abhandl. Math.-Kl. **2**, 21 [1960].

Außerdem gilt für die in § 2 gemachte Parametertransformation $s' = s$ und damit $v'^a = v^a$ in (9). Wir verschärfen (II) noch zur Annahme einer starren, wirbelfreien Kongruenz:

(III) $\sigma = 0$.

Als Folge dieser weiteren Annahme wird $q^a = 0$ wegen (13) und $\dot{\varrho} = 0$ wegen (15).

Jetzt ergibt sich aus (3), (4), (6) mit (12), (14), (16):

$$P^a - M\,v^a = v_d \int_{\Gamma_v} \mathrm{d}V\,\{\xi^a (p_{|b} h^{db} + p\,v^d) + 2\,\varrho\,v^r \int_x^\xi \xi^a(\tau)\,\eta_r{}^{def} [6\,\mu\,t_{[e}\,v_{f]} + t^d (\dot{v}_{d||[e} v_{f]} + \dot{v}_d\,\dot{v}_{[e} v_{f]})]\,\mathrm{d}\tau\}. \tag{17}$$

Aus (9) ergibt sich mit $\mathcal{L}_v\,\xi^a = v^a - v^a{}_{||b}\,\xi^b$ und (7):

$$M\,s^a = \frac{\mathrm{d}v^s}{\mathrm{d}s}\,h_{sr} \int_{\Gamma_v} \xi^a\,\varrho\,v^r\,\mathrm{d}V + M\,v^a. \tag{18}$$

Differenzieren von (1), (9) liefert noch: $$\frac{\mathrm{d}M(s)}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}v_r}{\mathrm{d}s} \int_{\Gamma_v} \varrho\,v^r\,\mathrm{d}V, \tag{19}$$

$$M\,\frac{\mathrm{d}s^a}{\mathrm{d}s} = -\left(\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}s}\,v^a + \frac{1}{M}\,\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}s}\,\frac{\mathrm{d}v^s}{\mathrm{d}s}\,h_{sr} \int_{\Gamma_v} \xi^a\,\varrho\,v^r\,\mathrm{d}V\right) + \frac{\mathrm{d}^2 v^s}{\mathrm{d}s^2}\,h_{sr} \int_{\Gamma_v} \xi^a\,\varrho\,v^r\,\mathrm{d}V + 2\left(\frac{\mathrm{d}v_r}{\mathrm{d}s} \int_{\Gamma_v} \varrho\,v^r\,\mathrm{d}V\right) v^a. \tag{20}$$

Diese Formeln zeigen, daß im allgemeinen nicht einmal die Schwerelinie einer starren Kongruenz eine Geodätische ist. Wir untersuchen daher weitere Spezialfälle:

(IV a) Der von ξ nach x entlang $g(x, \xi)$ parallelverschobene Vektor $v^a(\xi)$ ist zu $v^a(x)$ kollinear.

Dann ist $P^a = M\,v^a = M\,s^a$, $\mathrm{d}M/\mathrm{d}s = 0$ und $\mathrm{d}s^a/\mathrm{d}s = 0$, d. h. die Bewegung ist geodätisch.

Offenbar ist diese Einschränkung aber zu stark, da sie nur in der flachen Welt realisierbar [18, 10] ist, wo die Schwerelinie einer beliebigen Materieverteilung bei fehlenden äußeren Kräften Geodätische ist. Wir versuchen daher:

(IV b) Der Schwerpunkt soll mit dem Bewegungszentrum [10] zusamenfallen, d. h. hier: $P^a = M\,v^a$.

Diese Bedingung scheint nach (17) bei vernünftigen Zustandsgleichungen nur dann erfüllbar zu sein, wenn die Integranden „ohne ξ-Anteil" von (17) bezüglich des Schwerpunkts symmetrisch sind [19]. Aus (IV b) läßt sich folgern:

$$\mathrm{d}M/\mathrm{d}s = 0\,, \tag{18}$$

$$M\,\frac{\mathrm{d}s^a}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}^2 v^s}{\mathrm{d}s^2}\,h_{sr} \int_{\Gamma_v} \xi^a\,\varrho\,v^r\,\mathrm{d}V.$$

Für Geodäsie brauchen wir noch eine weitere Zusatzforderung:

(V a) $$h_{sr} \int_{\Gamma_v} \xi^a\,\varrho\,v^r\,\mathrm{d}V = 0\,.$$

Dann ist die Behauptung durch Inspektion der Formeln klar. Außerdem impliziert (V a), daß der Gesamtdrehimpuls verschwindet, wonach unser Ergebnis mit dem aus Näherungsmethoden bekannten übereinstimmt: Monopolteilchen bewegen sich geodätisch.

Wir können diese letzte Bedingung noch etwas abschwächen zu:

(V b) Die Schwerelinie sei eine Stromlinie, d. h. $v^{[a}\,s^{b]} = 0$.

Dann liefert nämlich (18) mit $p^{ar} \equiv \int_{\Gamma_v} \xi^a\,\varrho\,v^r\,\mathrm{d}V$:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\mathrm{d}v^s}{\mathrm{d}s}\,h_{sr}\,p^{ar}\right) &= 0 \\ &= \left(\frac{\mathrm{d}v^s}{\mathrm{d}s}\right)^2 v_r\,p^{ar} + \frac{\mathrm{d}v^s}{\mathrm{d}s}\,v_s\,\frac{\mathrm{d}v_r}{\mathrm{d}s}\,p^{ar} \\ &\quad + \frac{\mathrm{d}v^s}{\mathrm{d}s}\,h_{sr}\,\frac{\mathrm{d}p^{ar}}{\mathrm{d}s} + \frac{\mathrm{d}^2 v^s}{\mathrm{d}s^2}\,h_{sr}\,p^{ar}; \end{aligned}$$

hier verschwindet der erste Summand wegen (7) in dem an $x^a(s)$ angehefteten RIEMANN-Normalkoordinatensystem und damit als Tensorgleichung überall, der zweite verschwindet wegen der Normiertheit von v^a und der dritte wegen $\dot{\varrho} = 0$.

Danach hat eine (I) – (III), (IV b), (V b) erfüllende Materieverteilung eine geodätische Schwerpunktsbewegung; ihre Schwerelinie ist eine Stromlinie, auf der wegen (14) der räumliche Druckgradient verschwindet. Nimmt man monotone Druck-

[18] Sie ist in einem Näherungsverfahren, das das Gravitationsfeld als praktisch konstant über den Probekörper annimmt, realisiert.

[19] Beachte, daß in den Integranden auf Grund der Parallelverschiebung das volle Gravitationsfeld eingeht. Die Symmetrieforderung ist so stark, daß sie auch (I) ersetzen könnte.

verteilung an, dann ist die Schwerelinie auch Kurve mit maximalem Druck. THOMAS [20] hat gezeigt, daß in einer idealen Flüssigkeit die Kurve mit maximalem Druck eine Geodätische ist.

Somit haben wir die eingangs gestellte Frage positiv beantworten können. Eine vollständige Erfassung aller sich geodätisch bewegender Objekte durch Angabe ihrer lokalen Eigenschaften verlangt auch die vollständige Berücksichtigung des Hintergrunds somit faktisch die Lösung der Feldgleichungen. Diese Arbeit verfolgt aber noch als zweites Ziel, aufzuzeigen, wie lokale Eigenschaften eines Objekts auf sein Verhalten als Ganzes wirken. Der Nutzen einer solchen Betrachtungsweise liegt darin, daß es gelegentlich möglich sein sollte, einen Stern näherungsweise hydrodynamisch zu beschreiben, womit dann die Beobachtung seiner Bewegung zu einem Test für die Richtigkeit der versuchten Beschreibung wird. Abschließend sei dazu bemerkt, daß für eine starre Kongruenz mit $\omega \neq 0$ unter geeigneten Näherungsannahmen die Bewegungsgleichung des Dipolteilchens von PAPAPETROU nach der hier aufgezeigten Methode errechnet werden kann.

[20] Y. THOMAS, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S. **48**, 1567, 2063 [1962].

Einsteinsche Feldgleichungen für das axialsymmetrische, stationäre Gravitationsfeld im Innern einer starr rotierenden idealen Flüssigkeit

MANFRED TRÜMPER

I. Institut für Theoretische Physik der Universität Hamburg

(Z. Naturforschg. **22 a**, 1347—1351 [1967]; eingegangen am 8. Juni 1967)

Herrn Professor Dr. PASCUAL JORDAN *zum 65. Geburtstag gewidmet*

Die EINSTEINschen Gravitationsfeldgleichungen für das Innere einer starr und gleichförmig rotierenden idealen Flüssigkeit werden aufgestellt und vereinfacht. Eine der Feldgleichungen kann sofort integriert werden. Die übrigen bilden ein System von vier quasilinearen, partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung für vier Funktionen von zwei Variablen.

Es ist der Zweck dieser Arbeit, über die jüngsten Fortschritte auf dem Wege zur Beschreibung des Gravitationsfeldes eines rotierenden Körpers zu berichten. Sie besteht aus zwei Teilen: Im einführenden, ersten Teil wird eine Normalform des Linienelementes angegeben, im zweiten Teil werden die Feldgleichungen aufgestellt, vereinfacht und diskutiert.

1. Normalform des Linienelementes

Zur Bestimmung des Gravitationsfeldes eines axialsymmetrischen, starr und stationär rotierenden Körpers muß man zwei Teilaufgaben lösen: Erstens muß man das Linienelement vereinfachen, d. h. die Zahl der Funktionen, die das Problem beschreiben, so weit wie möglich verringern. Das erfolgt durch Anpassung der Koordinaten an die geometrischen Gegebenheiten. Zweitens müssen die Feldgleichungen aufgestellt, untersucht und für geeignete Randwerte gelöst werden.

Die Symmetrien des Problems, Stationarität und Axialsymmetrie, drücken sich dadurch aus, daß die Raumzeit eine 2-parametrige Isometriegruppe G_2 besitzt. Man nimmt an, daß die Isometriegruppe abelsch ist. Anschaulich bedeutet das folgendes: Der Ereignispunkt P', in den ein Punkt P durch Operationen der Gruppe übergeführt wird, ist bereits durch die Summe der Drehungen und die Summe der Zeittranslationen bestimmt, hängt jedoch nicht von der Anordnung der Einzeloperationen ab.

Da die Trajektorien der Gruppe zweidimensionale Flächen bilden, kann man also Koordinaten x^a $(a=1,\dots,4)$ so einführen, daß etwa die Koordinatenlinien von x^3 und x^4 in den Gruppentrajektorien verlaufen.

Von entscheidender Bedeutung für weitere Vereinfachungen ist sodann die Frage, ob die Trajektorien orthogonale 2-Flächen besitzen. Diese Frage ist erst in letzter Zeit geklärt worden. Pionierarbeit leistete PAPAPETROU [1], als er bewies, daß das Verschwinden des RICCI-Tensors hinreichend für die

[1] A. PAPAPETROU, Ann. Inst. Henri Poicaré A IV, No. 2, 83 [1966].